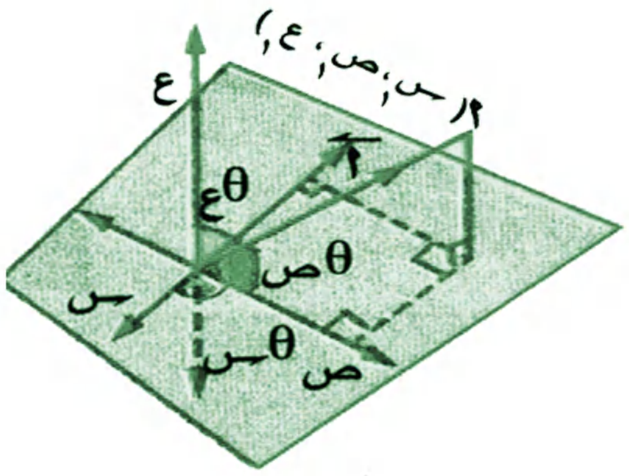
ملخص الوحدة الاولي هندسة فراغية

تذكر متجه الموضع لنقطة فى الفراغ

إذا كانت : أ (س١ ، ص١ ، ع١) نقطة فى الفراغ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$ متجهات وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$ ، $\overleftarrow{و ع}$ على الترتيب ، «و» هى نقطة الأصل فإن :



① متجه موضع نقطة أ بالنسبة لنقطة و : $\overrightarrow{و أ} = \overleftarrow{أ}$ = (س١ ، ص١ ، ع١)

② $\overleftarrow{أ}$ «بدلالة متجهات الوحدة الأساسية» = س١ $\overleftarrow{س}$ + ص١ $\overleftarrow{ص}$ + ع١ $\overleftarrow{ع}$

③ $\|\overleftarrow{أ}\|$ = طول $\overrightarrow{و أ}$ = $\sqrt{س_{١}^{٢} + ص_{١}^{٢} + ع_{١}^{٢}}$

④ إذا كانت : $\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$ هى الزوايا التى يصنعها المتجه $\overleftarrow{أ}$ مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات (زوايا الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{أ}$)

فإن : جتا $\theta_{س}$ ، جتا $\theta_{ص}$ ، جتا $\theta_{ع}$ هى جيوب تمام زوايا اتجاه المتجه $\overleftarrow{أ}$ حيث جتا^{٢} $\theta_{س}$ + جتا^{٢} $\theta_{ص}$ + جتا^{٢} $\theta_{ع}$ = ١

⑤ المتجه $(-\overleftarrow{أ})$ = (− س١ ، − ص١ ، − ع١) هو المعكوس الجمعى للمتجه $\overleftarrow{أ}$ حيث $\overleftarrow{أ}$ + $(-\overleftarrow{أ})$ = $\overleftarrow{و}$

وتكون زوايا اتجاهه هى $\pi - \theta_{س}$ ، $\pi - \theta_{ص}$ ، $\pi - \theta_{ع}$

⑥ متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{أ}$ $(\overleftarrow{ى_{١}})$ = $\frac{\overleftarrow{أ}}{\|\overleftarrow{أ}\|}$ = (جتا $\theta_{س}$ ، جتا $\theta_{ص}$ ، جتا $\theta_{ع}$)

لاحظ أن : زوايا الاتجاه للمتجهات فى الاتجاه الموجب للمحاور س ، ص ، ع هى (٠ ، ٩٠° ، ٩٠°) ، (٩٠° ، ٠ ، ٩٠°) ، (٩٠° ، ٩٠° ، ٠) على الترتيب وبالتالى جيوب تمامها هى (١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ١ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ١)

⑦ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = (س١ ، ص١ ، ع١) ، $\overleftarrow{ب}$ = (س٢ ، ص٢ ، ع٢) فإن :

- $\overrightarrow{أ ب}$ = $\overleftarrow{ب}$ − $\overleftarrow{أ}$ = (س٢ − س١ ، ص٢ − ص١ ، ع٢ − ع١)
- $\|\overrightarrow{أ ب}\|$ = $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢} + (ع_{٢} - ع_{١})^{٢}}$
- $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{ب}$ إذا وفقط إذا كان : س١ = س٢ ، ص١ = ص٢ ، ع١ = ع٢

⑧ إذا كان المتجه : $\overleftarrow{أ}$ يصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات

نبى أن : $\theta_{س} = \theta_{ص} = \theta_{ع} = \theta$ فإن : جتا $\theta_{س}$ = جتا $\theta_{ص}$ = جتا $\theta_{ع}$ = جتا θ

∵ جتا^{٢} $\theta_{س}$ + جتا^{٢} $\theta_{ص}$ + جتا^{٢} $\theta_{ع}$ = ١ ، ∴ ٣ جتا^{٢} θ = ١

∴ جتا^{٢} θ = $\frac{١}{٣}$ ∴ جتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنها θ = ٥٤° ٤٤′ ٨″

أ، جتا θ = − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنها θ = ١٢٥° ١٥′ ٥٢″

⑨ * مجموع قياس أى زاويتين من زوايا الاتجاه أكبر من أو يساوى ٩٠°

* إذا كان مجموع قياسى زاويتى اتجاه ٩٠° فإن قياس الزاوية الثالثة ٩٠°

تذكر العمليات على المتجهات

① ضرب متجه فى عدد حقيقى غير صفرى : إذا كان : ك ∈ ح* فإن : ك $\overleftarrow{أ}$ = ك (س١ ، ص١ ، ع١) = (ك س١ ، ك ص١ ، ك ع١)

حيث $\overleftarrow{أ}$ // ك $\overleftarrow{أ}$ وفى نفس الاتجاه إذا كان ك > ٠ وفى عكس الاتجاه إذا كان ك < ٠

② جمع المتجهات : إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (س١ ، ص١ ، ع١) ، $\overleftarrow{ب}$ = (س٢ ، ص٢ ، ع٢)

فإن : $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$ = (س١ + س٢ ، ص١ + ص٢ ، ع١ + ع٢)

③ الضرب القياسى لمتجهين : $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ = ‖$\overleftarrow{أ}$‖ ‖$\overleftarrow{ب}$‖ جتا θ

، $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ = أ$_س$ ب$_س$ + أ$_ص$ ب$_ص$ + أ$_ع$ ب$_ع$

④ الضرب الاتجاهى لمتجهين : $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ = (‖$\overleftarrow{أ}$‖ ‖$\overleftarrow{ب}$‖ جا θ) $\overleftarrow{ى}$

حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه عمودى على مستوى المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$: $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ = $\begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$

لاحظ الخواص الآتية :

- $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ = $\overleftarrow{ب}$. $\overleftarrow{أ}$ بينما $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ = − ($\overleftarrow{ب}$ × $\overleftarrow{أ}$)
- إذا كان : $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ = صفر فإن : $\overleftarrow{أ}$ ⊥ $\overleftarrow{ب}$

  بينما إذا كان : أ × ب = ٠ فإن : $\overleftarrow{أ}$ // $\overleftarrow{ب}$ حيث أ ، ب غير صفريين
- $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{أ}$ = ‖$\overleftarrow{أ}$‖^2 بينما $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{٠}$
- $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{و}$ = $\overleftarrow{و}$. $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{و}$. $\overleftarrow{و}$ = صفر بينما $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{و}$ = $\overleftarrow{و}$ × $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{و}$ × $\overleftarrow{و}$ = $\overleftarrow{و}$
- (م $\overleftarrow{أ}$) . $\overleftarrow{ب}$ = $\overleftarrow{أ}$. (م $\overleftarrow{ب}$) = م ($\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$) ، (م $\overleftarrow{أ}$) × $\overleftarrow{ب}$ = $\overleftarrow{أ}$ × (م $\overleftarrow{ب}$) = م ($\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$)
- ($\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$) . $\overleftarrow{حـ}$ = $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{حـ}$ + $\overleftarrow{ب}$. $\overleftarrow{حـ}$ ، ($\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$) × $\overleftarrow{حـ}$ = $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{حـ}$ + $\overleftarrow{ب}$ × $\overleftarrow{حـ}$
- $\overleftarrow{س}$. $\overleftarrow{س}$ = $\overleftarrow{ص}$. $\overleftarrow{ص}$ = $\overleftarrow{ع}$. $\overleftarrow{ع}$ = ١ بينما $\overleftarrow{س}$ × $\overleftarrow{س}$ = $\overleftarrow{ص}$ × $\overleftarrow{ص}$ = $\overleftarrow{ع}$ × $\overleftarrow{ع}$ = $\overleftarrow{٠}$
- $\overleftarrow{س}$. $\overleftarrow{ص}$ = $\overleftarrow{ص}$. $\overleftarrow{ع}$ = $\overleftarrow{ع}$. $\overleftarrow{س}$ = ٠ بينما $\overleftarrow{س}$ × $\overleftarrow{ص}$ = $\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ص}$ × $\overleftarrow{ع}$ = $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ع}$ × $\overleftarrow{س}$ = $\overleftarrow{ص}$

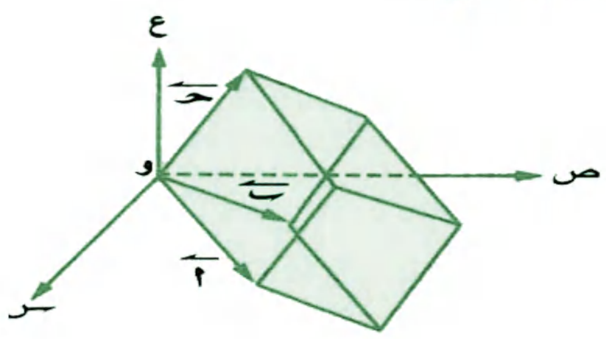
  ، $\overleftarrow{ص}$ × $\overleftarrow{س}$ = − $\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ع}$ × $\overleftarrow{ص}$ = − $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{س}$ × $\overleftarrow{ع}$ = − $\overleftarrow{ص}$

⑤ الضرب الثلاثى القياسى : $\overleftarrow{أ}$. ($\overleftarrow{ب}$ × $\overleftarrow{حـ}$) = $\begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ حـ_س & حـ_ص & حـ_ع \end{vmatrix}$

لاحظ الخواص الآتية :

- $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ × $\overleftarrow{حـ}$ = $\overleftarrow{ب}$. $\overleftarrow{حـ}$ × $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{حـ}$. $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ (يمكن تبديل المتجهات مع الاحتفاظ بالترتيب الدورى للمتجهات)
- $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ × $\overleftarrow{حـ}$ = $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$. $\overleftarrow{حـ}$ (يمكن تبديل علامتى الضرب مع الاحتفاظ بالترتيب الدورى للمتجهات)

تذكر المعنى الهندسى لمعيار الضرب الاتجاهى لمتجهين والضرب الثلاثى القياسى



① $\| \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \|$ = مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه : $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{أ}$ ضلعان متجاوران فيه

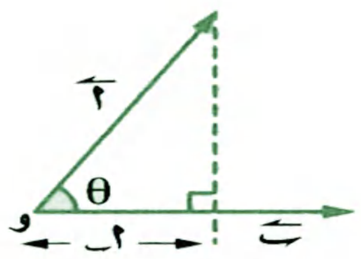
= ضعف مساحة المثلث الذى فيه : $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{أ}$ ضلعان متجاوران فيه.

② إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{حـ}$ ثلاثة متجهات تكون ثلاثة أحرف غير متوازية فى متوازى سطوح فإن حجم متوازى السطوح = $| \overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ} |$

ملاحظات

① المركبة الجبرية (المسقط الجبرى) للمتجه $\overleftarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{ب}$

$$أ_{\overleftarrow{ب}} = \| \overleftarrow{أ} \| \text{ جتا } \theta = \frac{\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{ب} \|}$$



② المركبة الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{ب}$ = $\frac{\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{ب} \|} \cdot \frac{\overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{ب} \|} = (\frac{\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{ب} \|^{٢}}) . \overleftarrow{ب}$

③ جيب تمام الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$: جتا $\theta = \frac{\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{أ} \| \| \overleftarrow{ب} \|}$

④ $\| \overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} \|^{٢} = \| \overleftarrow{أ} \|^{٢} + ٢ (\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}) + \| \overleftarrow{ب} \|^{٢} = \| \overleftarrow{أ} \|^{٢} + \| \overleftarrow{ب} \|^{٢} + ٢ \| \overleftarrow{أ} \| \| \overleftarrow{ب} \|$ جتا θ

⑤ متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ هو $\overleftarrow{ى} = \frac{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \|}$

⑥ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين غير صفريين وكان :

- $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{و}$ فإن : $\overleftarrow{أ}$ // $\overleftarrow{ب}$ والعكس صحيح.
- $\frac{أ_{س}}{ب_{س}} = \frac{أ_{ص}}{ب_{ص}} = \frac{أ_{ع}}{ب_{ع}}$ فإن : $\overleftarrow{أ}$ // $\overleftarrow{ب}$ والعكس صحيح.

⑦ إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاثة نقاط فى الفراغ ثلاثى الأبعاد وكان : $\overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{بحـ} = \overleftarrow{و}$ فإن : أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

⑧ لإثبات أن النقاط أ ، ب ، حـ تقع فى مستوى واحد يمر بنقطة الأصل نثبت أن : $\overleftarrow{أ} . (\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ}) = ٠$

ومنها فإن $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{حـ}$ متجهات موضع تقع فى مستوى واحد.

⑨ لإيجاد قياس الزاوية الصغرى θ بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ نستخدم القانون : جتا $\theta = \frac{\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{أ} \| \| \overleftarrow{ب} \|}$

⑩ إذا كان : $\| \overleftarrow{ب} \| = \| م \overleftarrow{أ} \|$ فإن : $\| \overleftarrow{ب} \| = | م | . \| \overleftarrow{أ} \|$

⑪ $\| \overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} \| \geq \| \overleftarrow{أ} \| + \| \overleftarrow{ب} \|$

⑫ $\| \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \| = \| \overleftarrow{أ} \| \| \overleftarrow{ب} \|$ جا θ ، جا $\theta = \frac{\| \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \|}{\| \overleftarrow{أ} \| \| \overleftarrow{ب} \|}$

⑬ متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ وهو العمودى على كل من $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ هو $\overleftarrow{ى} = \frac{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \|} = \frac{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{أ} \| \| \overleftarrow{ب} \| \text{ جا } \theta}$

⑭ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{حـ}$ ثلاثة متجهات غير صفرية

وكان : $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{حـ}$ فهذا لا يعنى بالضرورة أن $\overleftarrow{ب} = \overleftarrow{حـ}$ «خاصية الحذف غير متحققة»

تذكر البُعد بين نقطتين فى الفراغ وإحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة

إذا كانت : أ $(س_{١} ، ص_{١} ، ع_{١})$ ، ب $(س_{٢} ، ص_{٢} ، ع_{٢})$ فإن :

① طول $\overline{أب} = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢} + (ع_{٢} - ع_{١})^{٢}}$

② إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب} = (\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} ، \frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢} ، \frac{ع_{١} + ع_{٢}}{٢})$

ملخص الوحدة الثانية هندسة فراغية

تذكر الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

* متجه اتجاه المستقيم : إذا كان ل ، م ، ن هى جيوب تمام الاتجاه لمستقيم فإن المتجه : $\overleftarrow{هـ}$ = ك (ل ، م ، ن) يمثل متجه اتجاه للمستقيم ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{هـ}$ = (أ ، ب ، حـ) وتسمى الأعداد أ ، ب ، حـ بنسب اتجاه المستقيم.

* معادلة الخط المستقيم : الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) والمتجه $\overleftarrow{هـ}$ = (أ ، ب ، حـ)

متجه اتجاه له هى :

الصورة المتجهة : $\overleftarrow{ر}$ = ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) + ك (أ ، ب ، حـ)

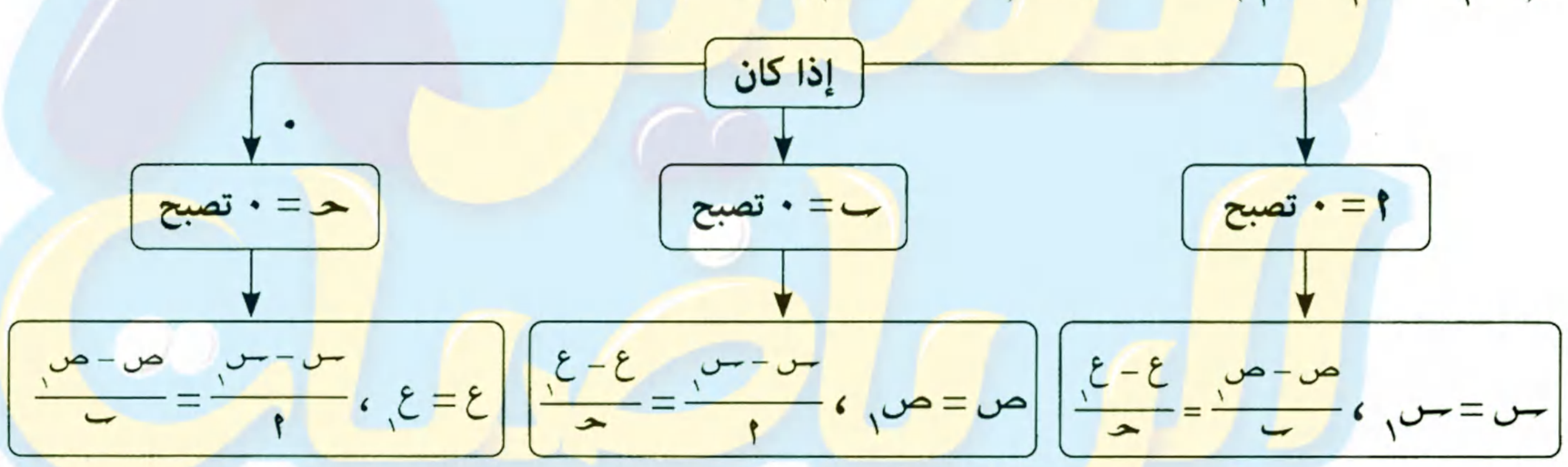
الصورة البارامترية : $س = س_1 + ك أ$ ، $ص = ص_1 + ك ب$ ، $ع = ع_1 + ك حـ$

الصورة الإحداثية : $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{حـ}$

ملاحظات

① فى معادلة المستقيم بالصورة البارامترية $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{حـ}$

حيث ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) نقطة عليه ، (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه له



② معادلة المحور

- س هى ← ص = ٠ ، ع = ٠ ومتجه اتجاهه (ك ، ٠ ، ٠)
- ص هى ← س = ٠ ، ع = ٠ ومتجه اتجاهه (٠ ، ك ، ٠)
- ع هى ← س = ٠ ، ص = ٠ ومتجه اتجاهه (٠ ، ٠ ، ك)

حيث ك ≠ ٠

③ معادلة المستقيم المار بالنقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) ويوازى المحور

- س هى ← ص = $ص_1$ ، ع = $ع_1$
- ص هى ← س = $س_1$ ، ع = $ع_1$
- ع هى ← س ∈ $س_1$ ، ص = $ص_1$

ملخص الوحدة الثانية هندسة فراغية

تذكر معادلة المستوى فى الفراغ

* الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (س١ ، ص١ ، ع١) والمتجه $\overleftarrow{ن}$ = (أ ، ب ، حـ) عموديًا عليه هى :

• الصورة المتجهة : $\overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} \cdot$ (س١ ، ص١ ، ع١)

• الصورة القياسية : أ (س − س١) + ب (ص − ص١) + حـ (ع − ع١) = ٠

• الصورة العامة : أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠

ملاحظات

① المستوى الذى يقطع محاور الإحداثيات فى النقط (س١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ص١ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ع١) معادلته هى :

$$\frac{س}{س_1} + \frac{ص}{ص_1} + \frac{ع}{ع_1} = 1$$

② إذا علمت ثلاث نقاط أ (س١ ، ص١ ، ع١) ، ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢) ، حـ (س٣ ، ص٣ ، ع٣) واقعة على المستوى

فإن معادلة المستوى تعطى من العلاقة : $\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix} = ٠$

③ • معادلة المستوى س ص هى ع = ٠ ، المعادلة ع = أ هى معادلة مستوى يوازى المستوى س ص

• معادلة المستوى ص ع هى س = ٠ ، المعادلة س = أ هى معادلة مستوى يوازى المستوى ص ع

• معادلة المستوى س ع هى ص = ٠ ، المعادلة ص = أ هى معادلة مستوى يوازى المستوى س ع

④ إذا كانت :
- أ = ٠ ← فإن ← ب ص + حـ ع + ء = ٠ ← وهى ← يوازى محور س ← وعموديًا ← ص ع
- ب = ٠ ← المعادلة ← أ س + حـ ع + ء = ٠ ← معادلة ← يوازى محور ص ← على ← س ع
- حـ = ٠ ← تصبح ← أ س + ب ص + ء = ٠ ← مستوى ← يوازى محور ع ← المستوى ← س ص

⑤ إذا كانت :
- أ = ء = ٠ ← فإن ← ب ص + حـ ع = ٠ ← وهى ← يحوى المحور س ← وعموديًا ← ص ع
- ب = ء = ٠ ← المعادلة ← أ س + حـ ع = ٠ ← معادلة ← يحوى المحور ص ← على ← س ع
- حـ = ء = ٠ ← تصبح ← أ س + ب ص = ٠ ← مستوى ← يحوى المحور ع ← المستوى ← س ص

ملخص الوحدة الثانية هندسة فراغية

★ **الزوايا بين (مستقيمين - مستويين - مستقيم ومستوى) فى الفراغ :**

① الزاوية θ بين مستقيمين ل١ ، ل٢ فى الفراغ حيث متجها اتجاهيهما $\overleftarrow{هـ_1}$ ، $\overleftarrow{هـ_2}$ نوجدها من العلاقة :

مستقيمين

$$\text{جتا } \theta = \frac{|\overleftarrow{هـ_1} \cdot \overleftarrow{هـ_2}|}{\|\overleftarrow{هـ_1}\| \, \|\overleftarrow{هـ_2}\|} \quad \text{حيث } 0 \leq \theta \leq 90^\circ$$

وإذا كان (ل١ ، م١ ، ن١) ، (ل٢ ، م٢ ، ن٢) هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن : جتا θ = | ل١ ل٢ + م١ م٢ + ن١ ن٢ |

② الزاوية θ بين مستويين فى الفراغ حيث $\overleftarrow{ن_1}$ متجه الاتجاه العمودى على الأول

، $\overleftarrow{ن_2}$ متجه الاتجاه العمودى على الثانى نوجدها من العلاقة :

مستويين

$$\text{جتا } \theta = \frac{|\overleftarrow{ن_1} \cdot \overleftarrow{ن_2}|}{\|\overleftarrow{ن_1}\| \, \|\overleftarrow{ن_2}\|} \quad \text{حيث } 0 \leq \theta \leq 90^\circ$$

③ قياس الزاوية بين مستقيم فى الفراغ متجه اتجاهه $\overleftarrow{هـ}$ ومستوى متجه الاتجاه العمودى عليه $\overleftarrow{ن}$ هو

$(90^\circ - \theta)$ حيث : $\text{جتا } \theta = \frac{|\overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{هـ}|}{\|\overleftarrow{ن}\| \, \|\overleftarrow{هـ}\|}$

★ **شرط توازى (مستقيمين - مستويين) فى الفراغ :**

① شرط توازى مستقيمين ل١ ، ل٢ فى الفراغ هو توازى متجهى اتجاهيهما أى $\overleftarrow{هـ_1} // \overleftarrow{هـ_2}$

② شرط توازى مستويين فى الفراغ هو توازى متجهى الاتجاه العموديين عليهما أى $\overleftarrow{ن_1} // \overleftarrow{ن_2}$

لاحظ أن : شرط توازى المستقيم والمستوى هو $\overleftarrow{هـ} \perp \overleftarrow{ن}$ (أى أن $\overleftarrow{هـ} \cdot \overleftarrow{ن} = 0$)

★ **شرط تعامد (مستقيمين - مستويين) فى الفراغ :**

① شرط تعامد مستقيمين هو تعامد متجهى اتجاهيهما أى $\overleftarrow{هـ_1} \perp \overleftarrow{هـ_2}$

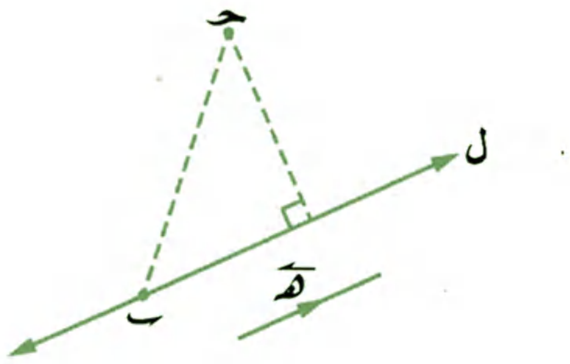
② شرط تعامد مستويين هو تعامد متجهى الاتجاه العموديين عليهما أى $\overleftarrow{ن_1} \perp \overleftarrow{ن_2}$

لاحظ أن : شرط تعامد المستقيم والمستوى هو $\overleftarrow{هـ} // \overleftarrow{ن}$ (أى $\overleftarrow{هـ} \times \overleftarrow{ن} = \vec{0}$)

★ **طول العمود من نقطة إلى مستقيم فى الفراغ :**

بفرض مستقيم ل فى الفراغ حيث ب نقطة عليه ، $\overleftarrow{هـ}$ متجه اتجاه له

فإن بعد نقطة حـ فى الفراغ عن المستقيم ل = $\frac{\|\overleftarrow{حـ ب} \times \overleftarrow{هـ}\|}{\|\overleftarrow{هـ}\|}$



★ **طول العمود من نقطة إلى مستوى :**

إذا كانت المعادلة العامة للمستوى هى أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠

فإن طول العمود المرسوم من النقطة م (س١ ، ص١ ، ع١) إلى المستوى هو ل = $\frac{|أ س_1 + ب ص_1 + حـ ع_1 + ء|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + حـ^2}}$

ملخص الوحدة الثانية هندسة فراغية

طول العمود المرسوم من النقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) على ... أو بُعد النقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) عن ...

- المحور س = $\sqrt{ص_1^2 + ع_1^2}$
- المحور ص = $\sqrt{س_1^2 + ع_1^2}$
- المحور ع = $\sqrt{س_1^2 + ص_1^2}$

طول العمود المرسوم من النقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) على ... أو بُعد النقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) عن ...

- المستوى ص ع = $|س_1|$
- المستوى س ع = $|ص_1|$
- المستوى س ص = $|ع_1|$

ملاحظات

① المستقيمان المتوازيان يجمعهما مستوى واحد.

② المستقيمان المتقاطعان يجمعهما مستوى واحد.

③ المستقيمان المتعامدان : أما أن يكونا متقاطعين على التعامد وعندها يجمعهما مستوى واحد

أ ، متخالفين وعندها لا يمكن أن يجمعهما مستوى واحد.

④ إذا توازى مستقيمان وكانت نقطة على أحدهما تحقق معادلة المستقيم الآخر فإن المستقيمين منطبقان.

⑤ فى المستويين : $أ_1 س + ب_1 ص + حـ_1 ع + ء_1 = 0$ ، $أ_2 س + ب_2 ص + حـ_2 ع + ء_2 = 0$ إذا كان :

(١) $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{حـ_1}{حـ_2} \neq \frac{ء_1}{ء_2}$ فإن المستويين متوازيان وغير منطبقين.

(٢) $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{حـ_1}{حـ_2} = \frac{ء_1}{ء_2}$ فإن المستويين منطبقان.

⑥ لإيجاد المسافة بين مستويين متوازيين فى الفراغ نوجد نقطة تقع على أحدهما ونحسب طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر.